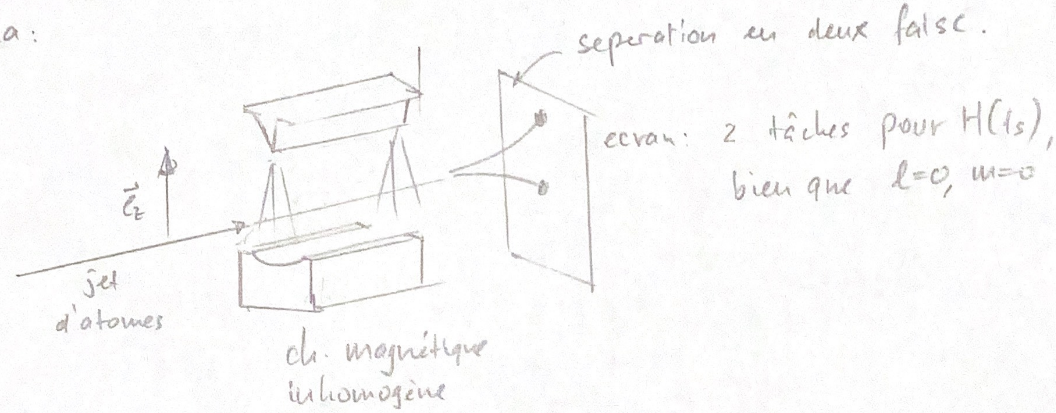
1. Question de cours

Stern-Gerlach:
- deflexion d'un jet d'atomes par un champ magnétique inhomogène
- interaction: $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, $\vec{\mu}$ mom. magnétique
  pour $\vec{B} = B_z e_z$ $W = -\mu_z \cdot B_z$
- pour mom. magnétique associé au mvt orb:
  $\mu_z \sim l_z$ $\left(\mu_z = -\frac{\mu_B}{\hbar} l_z \right)$
- force: $F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} \sim l_z$ donc $\sim m$,
  avec l entier $\Rightarrow$ m entier
  pour état $1s$ $\Rightarrow$ $m=0$, pas de deflexion
- mais résultat St-G: seperation en 2 raies

schéma:



2. Systèmes hydrogénoïdes et effet de taille fini des noyaux

a) $$\langle r\rangle_{1s} = \int_0^\infty r^3 R_{10}^2(r)\,dr = 4\int_0^\infty \left(\frac{Zr}{a_0}\right)^3 e^{-\frac{2Zr}{a_0}}\,dr \qquad \text{avec : } x = \left(\frac{Zr}{a_0}\right),\ dr = \left(\frac{a_0}{Z}\right)dx$$

$$= \left(\frac{4a_0}{Z}\right)\int_0^\infty x^3 e^{-2x}\,dx$$

$$= \left(\frac{4a_0}{Z}\right)\left(\frac{3!}{2^4}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{a_0}{Z}\right)$$

$$\langle r\rangle_{2s} = \int_0^\infty r^3 R_{20}^2(r)\,dr = 4\int_0^\infty \left(\frac{Zr}{2a_0}\right)^3\left(1-\frac{Zr}{2a_0}\right)^2 e^{-\frac{Zr}{a_0}}\,dr \qquad x = \frac{Zr}{2a_0},\ dr = \frac{2a_0}{Z}\,dx$$

$$= \left(\frac{8a_0}{Z}\right)\cdot\int_0^\infty x^3(1-x)^2 e^{-2x}\,dx$$

$$= \left(\frac{8a_0}{Z}\right)\int_0^\infty (x^3 - 2x^4 + x^5)\,e^{-2x}\,dx$$

$$= \left(\frac{8a_0}{Z}\right)\left(\frac{3!}{2^4} - 2\cdot\frac{4!}{2^5} + \frac{5!}{2^6}\right)$$

$$= \left(\frac{8a_0}{Z}\right)\left(\frac{6-24+30}{16}\right) = 6\left(\frac{a_0}{Z}\right)$$

b) $$H_{tf} = T - \frac{Ze^2}{r} + W(r) \quad \text{avec} \quad W(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > r_0 \\ -\frac{Ze^2}{r} + \frac{Ze^2}{r_0} & \text{pour } r < r_0 \end{cases}$$

c) $$\Delta E_{tf} = \int_0^\infty W(r) r^2 R_{nl}^2(r)\,dr = \frac{Ze^2}{r_0}\int_0^{r_0} r^2 R_{nl}^2(r)\,dr + Ze^2\int_0^{r_0} r R_{nl}^2(r)\,dr$$

$$\approx \left(\frac{Ze^2}{r_0}\right) R_{nl}^2(r_0)\int_0^{r_0} r^2\,dr + Ze^2 R_{nl}^2(r{=}0)\int_0^{r_0} r\,dr$$

$$= R_{nl}^2(r{=}0)\left(-\frac{Ze^2}{r_0}\cdot\frac{r_0^3}{3} + Ze^2\frac{r_0^2}{2}\right) = R_{nl}^2(r{=}0)\,\frac{Ze^2 r_0^2}{6}$$

donc pour 1s : $\Delta E_{tf}(1s) = 4\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3\cdot\frac{Ze^2 r_0^2}{6} = \frac{8}{6}\left(\frac{Zr_0}{a_0}\right)^2\cdot\frac{Z^2e^2}{2a_0} = \frac{8}{6}\left(\frac{Zr_0}{a_0}\right)^2 Z^2 R_\infty$

donc pour 2s : $\Delta E_{tf}(2s) = \frac{1}{4}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3\cdot\frac{Ze^2 r_0^2}{6} = \frac{1}{24}\left(\frac{Zr_0}{a_0}\right)^2\cdot\frac{Z^2e^2}{2a_0} = \frac{1}{24}\left(\frac{Zr_0}{a_0}\right)^2 Z^2 R_\infty$

donc pour 2p : $\Delta E_{tf}(2p) = 0$

d)
- seul les ~~états~~ "s" sont modifiés, car $R_{nl}(r{=}0) = 0$ pour $l \neq 0$
- plus l'électron est proche du noyau, plus l'état est affecté (voir résultat (a)), $\Delta E_{tf}(1s) > \Delta E_{tf}(2s)$
- la dég du modèle de Bohr pour 2s, 2p est levée par la pert.

3. Atome d'hydrogène (avec spin de l'électron) et corr relativistes

a) pour $n=3$, on a : $l=0,\ m=0,\ m_s=\pm\frac{1}{2}$

$l=1,\ m=0,\pm1,\ m_s=\pm\frac{1}{2}$

$l=2,\ m=0,\pm1,\pm2,\ m_s=\pm\frac{1}{2}$

base découplé :

$|n=3, l=0, m=0;\ s=\frac{1}{2}, m_s=\pm\frac{1}{2}\rangle$ (2)

$|n=3, l=1, m=0,\pm1, s=\frac{1}{2}, m_s=\pm\frac{1}{2}\rangle$ (6) (18)

$|n=3, l=2, m=0,\pm1,\pm2, s=\frac{1}{2}, m_s=\pm\frac{1}{2}\rangle$ (10)

pour $\vec{j}=\vec{l}+\vec{s}$, on a : $l=0,\ s=\frac{1}{2} \Rightarrow j=\frac{1}{2}$

$l=1,\ s=\frac{1}{2} \Rightarrow j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$l=2,\ s=\frac{1}{2} \Rightarrow j=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

base 'couplé' :

$|n=3, l=0, s=\frac{1}{2}, j=\frac{1}{2}, m_j=\pm\frac{1}{2}\rangle$ $3s_{1/2}$ (2)

$|n=3, l=1, s=\frac{1}{2}, j=\frac{1}{2}, m_j=\pm\frac{1}{2}\rangle$ $3p_{1/2}$ (2)

$|n=3, l=1, s=\frac{1}{2}, j=\frac{3}{2}, m_j=\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$ $3p_{3/2}$ (4) (18)

$|n=3, l=2, s=\frac{1}{2}, j=\frac{3}{2}, m_j=\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$ $3d_{3/2}$ (4)

$|n=3, l=2, s=\frac{1}{2}, j=\frac{5}{2}, m_j=\pm\frac{5}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$ $3d_{5/2}$ (6)

b) $H_{so} = A_{nl}(\vec{l}\cdot\vec{s}) = \frac{A_{nl}}{2}(j^2-l^2-s^2)$, base adapté : base couplé

$\Delta E_{so} = \langle nlsjm_j | H_{so} | nlsjm_j\rangle$

$\frac{1}{\frac{3}{2}\times2\times1}$

donc :

$l=0$: $\Delta E_{so}(3s_{1/2}) = \frac{A_{30}}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}-0-\frac{3}{4}\right) = 0$

$l=1$: $\Delta E_{so}(3p_{1/2}) = \frac{A_{31}}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}-1\times2-\frac{3}{4}\right) = -A_{31} = -\left(\frac{1}{54}\right)(mc^2\alpha^4)\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = -9.10^{-6}\ eV$

$\Delta E_{so}(3p_{3/2}) = \frac{A_{31}}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}-1\times2-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}A_{31} = \qquad = 4.5\cdot10^{-6}\ eV$

$l=2$: $\Delta E_{so}(3d_{3/2}) = \frac{A_{32}}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}-2\times3-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}A_{32} = -\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{54}\right)(mc^2\alpha^4)\left(\frac{1}{15}\right) = -2.6\cdot10^{-6}\ eV$

$\Delta E_{so}(3d_{5/2}) = \frac{A_{32}}{2}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}-2\cdot3-\frac{3}{4}\right) =$ [illegible] $A_{32} =$ [illegible] $\left(\frac{1}{54}\right)(mc^2\alpha^2)\left(\frac{1}{15}\right) = +1{,}79\ 10^{-6}\ eV$

$1/\frac{5}{2}\times3\times2$

$\frac{2}{2}$

c) $\Delta E_{rel}(3s_{1/2}) = \left(\frac{1}{54}\right)(mc^2\alpha^4)\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right) = \left(\frac{1}{72}\right)(mc^2\alpha^4) = -2\ 10^{-5}\ eV$

$\Delta E_{rel}(3p_{1/2}) = \quad -\prime- \quad = \quad -\prime- \quad = -2\ 10^{-5}\ eV$

$2/4$

$\Delta E_{rel}(3p_{3/2}) = \left(\frac{1}{54}\right)(mc^2\alpha^4)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{108}\right)(mc^2\alpha^4) = -1{,}34\ 10^{-5}\ eV$

$\Delta E_{rel}(3d_{3/2}) = \quad -\prime- \quad = \quad -\prime- \quad = -1{,}34\ 10^{-5}\ eV$

$\Delta E_{rel}(3d_{5/2}) = \left(\frac{1}{54}\right)(mc^2\alpha^4)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{648}\right)(mc^2\alpha^4) = -2{,}2\ 10^{-6}\ eV$

$\frac{2}{6}$

$\frac{3}{12}-\frac{4}{12}=-\frac{1}{12}$

d) voir feuille suivante

d) Schéma énergétique